Lista 9 (poziom podstawowy)

Zad. 1 (2 pkt.) Wyznacz $\log_{36}24$ wiedząc, że $\log_2 6 = a$.

Zad. 2 (1 pkt. za przykład) Oblicz

$36^{\log_6 5 - \frac{1}{4}}$, $2\log_5 2 + \log_5 3$, $\frac{\log_2 27}{\log_2 18 - 1}$.

Zad. 3 (1 pkt.) Czy ułamek $(5^{2023}+7^{2021}):(11^{1022}+3^{2023})$ można skrócić przez 2? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 4 (2 pkt.) Uzasadnij, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 5 jest podzielny przez 750.

Zad. 5 (1 pkt.) Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $|x+7|<5$?

Zad. 6 (1 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $(2023 - x)^2 - (2023 + x)^2$ dla $x = 1/2023$.

Zad. 7 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $2x^2-2(x+1)=2x(x-1)$.

Zad. 8 (1 pkt.) Niech $W(x) = x^5-12x^3+7$ oraz $V(x) = (x^2-8)^3$. Znajdź stopień wielomianu $W(x)+V(X)$ oraz $W(x)\cdot V(x)$.

Zad. 9 (1 pkt.) Różnica dwóch liczb wynosi 28 , a ich suma wynosi 2. Znajdź iloczyn tych liczb.

Zad. 10 (1 pkt.) Niech x oznacza długość podstawy trójkąta równoramiennego, którego ramię wynosi 10. Znajdź dziedzinę i zbiór wartości funkcji *f* przyporządkowującej liczbie x obwód tego trójkąta.

Zad. 11 (1 pkt.) Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -2/3\, x + 10$ w przedziale $[-10, 10]$.

Zad. 12 (2 pkt.) Oblicz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2}$. IIe miejsc zerowych (i o jakich znakach) ma ta funkcja? Znajdź oś symetrii wykresu tej funkcji.

Zad. 13 (1 pkt.) Oblicz sumę 100 kolejnych wyrazów ciągu $a_n = (-1)^n \cdot 17$.

Zad. 14 (1 pkt.) Czy ciąg $a_n = 2023 - n$ jest arytmetyczny czy geometryczny, rosnący czy malejący?

Zad. 15 (3 pkt.) Liczby 2m, m-4, 1 są kolejnymi wyrazami malejącego ciągu geometrycznego. Znajdź iloraz tego ciągu.

Zad. 16 (3 pkt.) Spirala jest zbudowana z półokręgów, których kolejne średnice tworzą ciąg geometryczny o ilorazie ½. Pierwszy wyraz tego ciągu to 16, a ostatni to 1/8. Znajdź długość tej spirali.

Zad. 17 (1 pkt.) W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC jest o jeden dłuższa od przyprostokątnej BC. Uzasadnij, że tangens kąta BAC jest mniejszy niż tangens kąta ABC.

Zad. 18 (1 pkt.) W trapezie ABCD krótsza podstawa AB ma długość $\sqrt{2}$, a dłuższa CD ma długość $3\sqrt{2}$. Niech S będzie punktem przecięcia się przekątnych tego trapezu. Ile razy pole trójkąta CDS jest większe od pola trójkąta ABS?

Zad. 19 (3 pkt.) Dany jest okrąg $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ oraz punkt $P = (-1/2, 2)$, który jest środkiem cięciwy AB tego okręgu. Wyznacz równanie prostej AB.

Zad. 20 (1 pkt.) Czy punkt $A = (4, 1)$ leży na okręgu $x^2 + (y - 1)^2 = 4$? Znajdź równanie krzywej symetrycznej do tego okręgu względem osi Ox.

Zad. 21 (1 pkt.) Suma wszystkich wysokości wszystkich ścian czworościanu foremnego wynosi $48\sqrt{3}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego czworościanu.

Zad. 22 (1 pkt.) W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa niż krawędź podstawy. Oblicz miarę kąta między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy.

Zad. 23 (2 pkt.) Ile jest wszystkich liczb sześciocyfrowych, których suma cyfr wynosi 3?

Zad. 24 (1 pkt.) Liczby 17, x, y, y+910, 2023 są kolejnymi wyrazami skończonego ciągu rosnącego. Mediana liczb 17, x, y wynosi 20. Mediana liczb x, y, y+910, 2023 jest równa 555. Oblicz średnią arytmetyczną wyrazów podanego ciągu.

Zad. 25 (2 pkt.) W zakładzie mleczarskim skontrolowano 20 kartonów mleka pod względem zawartości tłuszczu. Pięć kartonów miało 3,17% tłuszczu, dwa kartony 3,18%, 6 kartonów 3,2%, cztery kartony 3,21% oraz trzy kartony 3% tłuszczu. Normy dopuszczają odchylenie standardowe 0,03% od średniej zawartości tłuszczu 3,2%. Czy wylosowana do kontroli partia spełnia wymagane normy? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 26 (4 pkt.) Suma dwóch liczb wynosi 6. Znajdź te liczby, jeśli wiadomo, że suma podwojonego kwadratu jednej z nich i kwadratu drugiej jest najmniejsza z możliwych.

Zad. 27 (4 pkt.) Liczbę 7 dzielimy na trzy części tak aby pierwsza była dwa razy większa od drugiej. Jak należy dokonać podziału, aby suma kwadratów wszystkich trzech części była najmniejsza?

Zad. 28 (4 pkt.) Z krawędzi dachu podrzucono kamień, który po 2 sekundach spadł na ziemię. Wysokość (wyrażoną w metrach), na jakiej znajdował się kamień nad ziemią po upływie t sekund od chwili jego podrzucenia, opisuje dla $0 \leq t \leq 2$ funkcja $h(t) = -5t^2 + 5t + 10$. Z jakiej wysokości kamień został podrzucony? Oblicz, po jakim czasie od momentu podrzucenia kamień osiągnął największą wysokość. Oblicz największą wysokość, na jaką wzniósł się ten kamień.

Zad. 29 (5 pkt.) Drut o długości 28 cm należy podzielić na dwie części i z jednej zrobić kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, której jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Jak należy podzielić drut, jeżeli chcemy, aby suma pól otrzymanego kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

Zad. 30 (5 pkt.) Ratownicy mający do dyspozycji linę o długości 80 metrów mają wytyczyć przy brzegu plaży kąpielisko w kształcie prostokąta (wzdłuż brzegu nie będzie liny). Jakie wymiary powinno mieć to kąpielisko, jeżeli wczasowicze chcą, aby miało ono jak największą powierzchnię?

Zad. 31 (4 pkt.) Boki trójkąta mają długości 4, 8 i 10. Oblicz cosinus i tangens kąta leżącego naprzeciwko najkrótszego boku. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do najdłuższego boku.